

## Abstandsberechnungen

	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
<b>Punkt zu Punkt</b>	<p>1) Punkte abziehen  <math>A(a_1 a_2) \quad B(b_1 b_2)</math>                      A-B</p> $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$ <p><math>A(2 1) \quad B(3 2)</math>                      A-B</p> $\sqrt{(3 - 2)^2 + (2 - 1)^2}$	<p>1) Punkte abziehen  <math>A(a_1 a_2 a_3) \quad B(b_1 b_2 b_3)</math>                      A-B</p> $\sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$ <p><math>A(1 2 4) \quad B(3 3 2)</math>                      A-B=</p> $\sqrt{(3 - 1)^2 + (3 - 2)^2 + (2 - 4)^2}$
<b>Punkt zu Gerade</b>	<p><math>g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad P(5 2)</math></p> <p>Lotgerade: <math>g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0</math></p> $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ <p>GTR: <math>t=1,5; r=-1</math>                      t eingesetzt in Gleichung ergibt Lotpunkt L (3 4)</p> <p>Abstand d:  <math>d =  \overline{LP}  =  \vec{P} - \vec{L} </math>  <math>= \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \sqrt{(2)^2 + (-2)^2} \approx 2,8</math></p>	<p>1) Gerade in Parameterform schreiben  <math>g: x \rightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad P(P1 P2 P3)</math></p> <p>2) Punktprobe für P  <math>d = \frac{ (p - a) \times b }{ b }</math></p> <p><math>A(2 3 1) \quad B(3 7 1)</math></p> <p><math>g: x \rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad P(8 2 1)</math></p> $d = \frac{\left  \left( \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right }{\left  \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right }$
<b>Gerade zu Gerade</b>	<p>Abstand paralleler Geraden:                      Voraussetzung: Geraden sind parallel!!</p> <p>Kreuzprodukt aus Richtungsvektor und dem Vektor der beiden Ortsvektoren <math>\rightarrow</math> Differenz bilden</p> $ \vec{a} \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)  =  f $ <p>Beträge ausrechnen und teilen</p> $\frac{ f }{ \vec{a} } = d$	<p>Abstand windschiefer Geraden:</p> $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ <p>Lotfußpunktverfahren anwenden</p> <p>1) Normalenvektor der Richtungsvektoren</p> $\vec{n} * \vec{m}_g = 0 \Rightarrow x * 1 + y * 2 + z * (-2) = 0$ $\vec{n} * \vec{m}_h = 0 \Rightarrow x * (-1) + y * 2 + z * 0 = 0$

Daraus folgt:  $n = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2) Hilfsebene E aufstellen

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

bzw.

$$E: \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$$

3) Schnittpunkt von g und E

$$E: \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \right] * \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = 0$$

daraus folgt:  $F_g \langle 1|1|2 \rangle$

4) Lotgerade k

$$k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

5) Schnittpunkt von k und h

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + r * \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

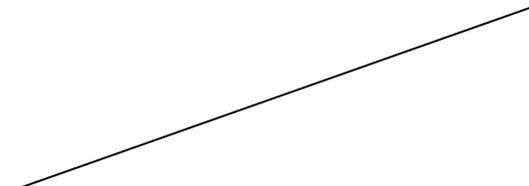
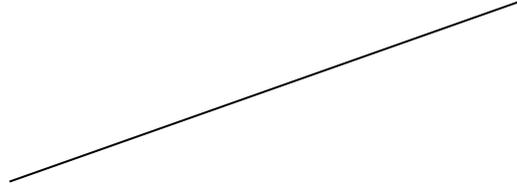
$\rightarrow t=1, r=-2, \rightarrow F_h = \langle 3|2|4 \rangle$

6) Abstand der Lotfußpunkte

$$d = |\overrightarrow{F_g F_h}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 3$$

Auch über Hesse'sche Normalenform lösbar

**Punkt  
zu  
Ebene**



**Lotfußpunktverfahren**

Aufgabe: Ermittle den Abstand d des Punktes

$P(4|4|5)$  von der Ebene  $E: x+y+2z=6$

1. Lotgerade g aufstellen

-Die Gerade soll senkrecht zur Ebene liegen,

daher nehmen wir den Normalenvektor oder

die Koeffizienten der Koordinatenform als

Richtungsvektor

-Da P auf der Gerade liegen soll, nehmen wir

den Ortsvektor als Stützvektor

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2. Schnittpunkt F von g und Ebene

$$(4+r)+(4+r)+2(5+2r)=6$$

$$18+6r=6$$

$$r=-2, \quad F(2|2|1)$$

3. Abstand von Punkt und Schnittpunkt

$$d = |\overrightarrow{PF}| =$$

$$\sqrt{(2-4)^2 + (2-4)^2 + (1-5)^2}$$

$$d = \sqrt{24} \approx 4,9$$

Hesse'sche Normalenform

Aufgabe: Ermittle den Abstand d des Punktes

$P(4|4|5)$  von der Ebene

$$E: \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

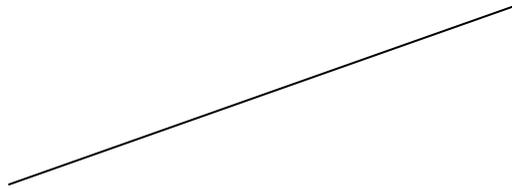
1. Hesse'sche Normalenform von E

$$E: \left[ \vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} = 0$$

2. Abstand von P und E

$$d = \left| \left[ \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix} \right| = \frac{12}{\sqrt{6}} \approx 4,9$$

**Gerade  
zu  
Ebene**



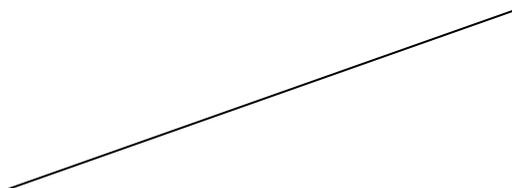
Einen Punkt auf der Geraden bestimmen und den Abstand des Punktes zur Ebene berechnen. Klar Ebene und Gerade kann nicht parallel sein, sonst kein Abstand.

$$E: 4x - 4y + 2z = 1 \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1. Lotgerade mit Stützvektor (oder anderer Punkt) der Geraden und Normalenvektor der Ebene als Richtungsvektor aufstellen
2. Lotfußpunkt ausrechnen
3. Abstand von Lotfußpunkt zum gewählten Punkt der Geraden berechnen

Lösung : 8,5 LE

**Ebene  
zu  
Ebene**



Einen Punkt auf der 1. Ebene bestimmen und den Abstand des Punktes zur 2. Ebene berechnen.

$$E: -4x + 5y + z = 10$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Lotgerade aufstellen

Lotfußpunkt ausrechnen

Abstand von zwei Punkten berechnen

Lösung : 6,48 LE